

Title	Equivariant Stable Homotopy Groups of Spheres with Involutions (多様体上の群作用と同変ホモトピー論)
Author(s)	荒木, 捷朗
Citation	数理解析研究所講究録 (1979), 365: 1-18
Issue Date	1979-10
URL	http://hdl.handle.net/2433/104592
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

Equivariant stable homotopy groups of spheres with involutions

阪市大 理学部 荒木捷朗

involution をもつ球面の equivariant stable homotopy groups の研究は, 1967 年頃 Bredon [4, 5] によりある程度系統的に行なわれたのであるが, その後, Landweber [7] による補足的研究があるものの, あまり研究されてはいないように思われる. その理由はいろいろ考えられるが, Bredon の記号のわかり難さ, 一応 13 stem まで部分的に extension を除いてかなり調べてあるように見えるのに, 具体的な結果は若干の例を除いて殆んど記述されてなく, 従って Bredon の論文 [4, 5] を follow することが困難であることがあげられる.

筆者は, π -cohomology [2] の立場からこの計算を試み, 入江幸右衛門氏の協力を得て, extension まで含めて 13 stem までの一応の計算を得た. その計算の量はかなりぼう大

であり, 又, 結果は部分的に誤りがあるかも知れないが, その計算方法等についてここに報告したい.

1. 初歩的性質.

Atiyah, Landweber による次の記号を用いる.

$\mathbb{R}^{p,q} : \mathbb{R}^{p,q} \subset \mathbb{R}^{p+q} = \mathbb{R}^p \oplus \mathbb{R}^q$ の分解 ($\tau(x, y) = (-x, y)$)
 上の involution τ を含む空間.

$B^{p,q} : \mathbb{R}^{p,q}$ の unit ball.

$S^{p,q} = \partial B^{p,q}$.

$\Sigma^{p,q} = B^{p,q} / S^{p,q}$.

τ -spectrum [2]

$$SR = \{ \Sigma^{n,n}, n \geq 0; \varepsilon_n : \Sigma^{1,1} \wedge \Sigma^{n,n} \xrightarrow{\tau} \Sigma^{n+1,n+1} \}$$

を用い, 基質 Σ 上の有限 τ -複体 X の (p,q) -th stable
 τ -homotopy group

$$\pi_{p,q}^S(X) = \widetilde{SR}_{p,q}(X) = \varinjlim_n [\Sigma^{n+p,n+q}, \Sigma^{n,n} X]^{\tau}$$

を (p,q) -th stable τ -cohomotopy group

$$\pi_S^{p,q}(X) = \widetilde{SR}^{p,q}(X) = \varinjlim_n [\Sigma^{n-p,n-q} X, \Sigma^{n,n}]^{\tau}$$

を定義される.

特に

$$\pi_{p,q}^S = \pi_{p,q}^S(\Sigma^{0,0})$$

が, この計算の対象になる.

定義より

$$\pi_{p,q}^S = \pi_S^{-p,-q}(\Sigma^{0,0}) = SR^{-p,-q}(pt)$$

であるから, τ -cohomology theory [2] の一般論が利用出来る.

特に, involution を忘れる

$$\text{forgetful homomorphism } \psi: \pi_{p,q}^S \rightarrow \pi_{p+q}^S$$

と, 不動点集合への制限による

$$\text{fixed-point homomorphism } \phi: \pi_{p,q}^S \rightarrow \pi_q^S$$

が定義される. この等を含む完全列については後述する.

τ -spectrum SR は $(-1, -1)$ -connected であるから, [2], Prop. 5.4, より

$$(1.1) \quad \phi: \pi_{p,q}^S \approx \pi_q^S \quad \text{for } p+q < 0.$$

この同型により, $p+q < 0$ のとき $\pi_{p,q}^S$ は普通の stable homotopy groups π_q^S に帰着され, この意味で決定されることとみなす (q が大きいとき π_q^S は決まっているのである).

$\pi_{p,q}^S$ の計算は, $p+q (\geq 0)$ の値により小さい方から次に決めて行くが, 上の同型 (1.1) に象徴されるように, あるいくつかの巡回群とある普通の homotopy 群との直和の形で決定されることが多い. $p+q$ を $\pi_{p,q}^S$ の stable stem とよぶ.

2. forgetful exact sequences.

[2], §5 を参照. τ -cofibration $S_+^{1,0} \subset B_+^{1,0} \rightarrow \Sigma^{1,0}$ の

stable τ -cohomotopy 群の完全列に於いて, $\{1\}$ の制限によ
る同型 $\pi_{s,q}^s(S^{1,0}_+) \approx \pi_{s,q}^{p+q}$ を用いると, forgetful homomorphism
 χ を含む完全列

$$\cdots \rightarrow \pi_{p+q}^s \xrightarrow{\delta^+} \pi_{p,q}^s \xrightarrow{\chi} \pi_{p-1,q}^s \xrightarrow{\chi} \pi_{p+q-1}^s \xrightarrow{\delta^+} \pi_{p,q-1}^s \rightarrow \cdots$$

が得られる。(準同型 $\chi: \pi_{p,q}^s \rightarrow \pi_{p-1,q}^s$ は包含 $\iota: \Sigma^{0,0} \subset \Sigma^{1,0}$ により誘導される). これは $\pi_{p,q}^s$ を計算するためのもので
基本的な手段になる. forgetful exact sequences とよぶ.

例. $\pi_4^s = \pi_5^s \approx 0$ であるから, 上の完全列より

$$\chi: \pi_{5-i,i}^s \approx \pi_{4-i,i}^s.$$

これより, 4-stems $\{\pi_{p,q}^s, p+q=4\}$ が与えられるのは 5-stems は
群として与えられる. (実際にはこれが十分ではなく, 生成元
の構成等他の考察が必要となるが).

3. fixed-point exact sequences.

$$\begin{aligned} \lambda_{p,q}^s &= \varinjlim_{k,l} [\Sigma^{p+k,q+l}/\Sigma^{0,q+l}, \Sigma^{k,l}]^{\tau} \\ &= \varinjlim_n [\Sigma^{n+p,n+q}/\Sigma^{0,n+q}, \Sigma^{n,n}]^{\tau} \end{aligned}$$

は restricted equivariant homotopy groups と呼ばれる (Levine [8], Landweber [7]). これは用いると, τ -co-
fibration $\Sigma^{0,n+q} \rightarrow \Sigma^{n+p,n+q} \rightarrow \Sigma^{n+p,n+q}/\Sigma^{0,n+q}$ の τ -co-
homotopy 完全列の colimit として, fixed-point homomorphism

ϕ を含む完全列

$$\cdots \rightarrow \lambda_{p,q}^S \rightarrow \pi_{p,q}^S \xrightarrow{\phi} \pi_q^S \xrightarrow{\partial_p} \lambda_{p,q-1}^S \rightarrow \cdots$$

が得られる。これと fixed-point exact sequences とより、 $\pi_{p,q}^S$ を計算するためのもう2の基本手段になる。

$\lambda_{p,q}^S$ を決めて、これにより上の完全列から $\pi_{p,q}^S$ を計算せよ
 ということになるが、 $\lambda_{p,q}^S$ はいろいろな解釈をえつつあり、又、
 後述(87)するように、この完全列はかなり多くの所を分解
 し、若干の所を除けば $\lambda_{p,q}^S$ を決めることは $\pi_{p,q}^S$ が決まる。
 除外した部分は forgetful exact sequences を計算するところ
 が多い。

$\lambda_{p,q}^S$ と他の stable τ -cohomology 群との関係については、 τ -同
 相 $\sum^{n+p-r, n+q+1}(S_+^{r,0}) \approx \sum^{n+p, n+q} / \sum^{n+p-r, n+q}$ により

$$\pi_S^{r-p, -q-1}(S_+^{r,0}) = \varinjlim_n [\sum^{n+p, n+q} / \sum^{n+p-r, n+q}, \sum^{n,n}]^{\tau}.$$

よって、射影 $\sum^{n+p, n+q} / \sum^{0, n+q} \rightarrow \sum^{n+p, n+q} / \sum^{n+p-r, n+q}$ は準

同型写像

$$g^{(r)}: \pi_S^{r-p, -q-1}(S_+^{r,0}) \rightarrow \lambda_{p,q}^S$$

を誘導する。一方、 τ -写像 $S_+^{r+1,0} \rightarrow S_+^{r+1,0} / S_+^{1,0} = \Sigma^{1,0}(S_+^{r,0})$

は準同型

$$\xi_{r+1,r}: \pi_S^{r-p, -q-1}(S_+^{r,0}) \rightarrow \pi_S^{r+1-p, -q-1}(S_+^{r+1,0})$$

を誘導し、可換図式

5

$$\begin{array}{ccc}
 \pi_S^{r-p, q-1}(S_+^{r,0}) & \xrightarrow{g(r)} & \lambda_{p,q}^S \\
 \downarrow \xi_{r+1,r} & & \\
 \pi_S^{r+1-p, q-1}(S_+^{r+1,0}) & \xrightarrow{g(r+1)} &
 \end{array}$$

が成立し、準同型

$$g: \varinjlim \{ \pi_S^{r-p, q-1}(S_+^{r,0}), \xi_{r+1,r} \} \rightarrow \lambda_{p,q}^S$$

が誘導される。

τ -cofibration の可換図式

$$\begin{array}{ccccc}
 \Sigma^{0, n+q} & \longrightarrow & \Sigma^{n+p, n+q} & \longrightarrow & \Sigma^{n+p, n+q} / \Sigma^{0, n+q} \\
 \downarrow & & \parallel & & \downarrow \\
 \Sigma^{n+p-r, n+q} & \longrightarrow & \Sigma^{n+p, n+q} & \longrightarrow & \Sigma^{n+p, n+q} / \Sigma^{n+p-r, n+q}
 \end{array}$$

より、完全列の可換図式

$$\begin{array}{ccccccc}
 \cdots \rightarrow \pi_S^{r-p, q-1}(S_+^{r,0}) & \rightarrow & \pi_{p,q}^S & \xrightarrow{\chi^r} & \pi_{p-r,q}^S & \rightarrow & \pi_S^{r-p, q}(S_+^{r,0}) \rightarrow \cdots \\
 & \downarrow g^{(\lambda)} & \parallel & & \downarrow \phi & & \downarrow g^{(r)} \\
 \cdots \rightarrow \lambda_{p,q}^S & \longrightarrow & \pi_{p,q}^S & \xrightarrow{\phi} & \pi_q^S & \longrightarrow & \lambda_{p,q-1}^S \rightarrow \cdots
 \end{array}$$

を得る。2, 1, 2, $r \mapsto r+1$ colimit $\in \mathcal{C}$, $\varinjlim (\pi_{p,q}^S, \chi) = \pi_q^S$

(12), §4) より可換図式

$$\begin{array}{ccccccc}
 \cdots \xrightarrow{\varinjlim} \pi_S^{r-p, q-1}(S_+^{r,0}) & \rightarrow & \pi_{p,q}^S & \xrightarrow{\phi} & \pi_q^S & \rightarrow & \varinjlim \pi_S^{r-p, q}(S_+^{r,0}) \rightarrow \cdots \\
 & \downarrow g & \parallel & & \parallel & & \downarrow g \\
 \cdots \rightarrow \lambda_{p,q}^S & \longrightarrow & \pi_{p,q}^S & \xrightarrow{\phi} & \pi_q^S & \longrightarrow & \lambda_{p,q-1}^S \rightarrow \cdots
 \end{array}$$

が得られる。よって

Prop. 3.1. $g: \varinjlim_S \{ \pi_S^{r-p, q-1}(S_+^{r,0}), \xi_{r+1, r} \} \approx \lambda_{p, q}^S$ 同型.

τ -cofibration $S_+^{1,0} \rightarrow S_+^{r+1,0} \rightarrow S_+^{r+1,0}/S_+^{1,0} = \Sigma^{1,0}(S_+^{r,0})$ の
 τ -cohomotopy 完全列 $\xi \hookrightarrow \tau$,

$$\xi_{r+1, r}: \pi_S^{r-p, q-1}(S_+^{r,0}) \approx \pi_S^{r+1-p, q-1}(S_+^{r+1,0}) \quad \text{for } r \geq p+q+2.$$

よって

Prop. 3.2. $g^{(r)}: \pi_S^{r-p, q-1}(S_+^{r,0}) \approx \lambda_{p, q}^S$ for $r \geq p+q+2$.

∴ 同型により, $\pi_S^{r-p, q-1}(S_+^{r,0})$ は $p+q \leq r-2$ の範囲で計算される, $\lambda_{p, q}^S$ が $p+q \leq r-2$ の範囲で求まる。よって,
 $\pi_S^{p, q}(S_+^{r,0})$ は r によって順番に計算して行けばよいことがわかる。

4. Bredon-Landweber の方法.

Bredon [5] は次の群を考察した。

$$\pi_{p, q}^t(r, q; t) = \varinjlim_k [\Sigma^{r, n+kt-t-r} / \Sigma^{q, n+kt-t-r}, \Sigma^{t, k}]^{\tau}$$

すなわち,

$$\pi_{p+q}^{p, q}(n+p, n+p-r; n) = \varinjlim_k [\Sigma^{n+p, q+k} / \Sigma^{n+p-r, q+k}, \Sigma^{n, k}]^{\tau}$$

と置く

$$\varinjlim_n \pi_{p+q}^{p, q}(n+p, n+p-r; n) = \varinjlim_n [\Sigma^{n+p, n+q} / \Sigma^{n+p-r, n+q}, \Sigma^{n, n}]^{\tau}$$

よって

$$\text{Lemma 4.1} \quad \pi_S^{r-p, -q-1}(S_+^{r,0}) \approx \varinjlim_n \pi_{p+q}(n+p, n+p-r; n).$$

これが Bredon の考察した群と我々が計算する群との関係である。

そして Landweber [7] はある種の bundle 上のコホモロジー群 $\Omega_n^{r,s}$ を定義し、同型

$$\pi_n(r, q; t) \approx \Omega_n^{r-t, r-q}$$

を示した。このことより Lemma 4.1 より

$$\text{Prop. 4.2} \quad \pi_S^{r-p, -q-1}(S_+^{r,0}) \approx \Omega_{p+q}^{p, r}, \text{ 同型.}$$

$$\Lambda_{p,q}^S \approx \Omega_{p+q}^p = \varinjlim_r \Omega_{p+q}^{p, r}, \text{ 同型.}$$

更に、Landweber [7] は、Pontrjagin-Thom 構成と t -正則近似を用いて、同型

$$(4.3) \quad \Omega_{p+q}^{p, r} \approx \pi_q^S(p^{r-p-1}/p^{p-1}) \quad \text{for } p \leq 0$$

を示した。但し、 $p^{-1} = \phi$, $p^{r-1}/p^{-1} = p_+^{r-1}$.

Stunted 射影空間の homotopy 群は Stiefel 多様体の homotopy 群と密接に関係する。 p^{r-p-1}/p^{p-1} , $p \leq 0$, は $(-p-1)$ -次元であるから、

$$\pi_q^S(p^{r-p-1}/p^{p-1}) \approx \pi_q^S(p^{r-p-1}/p^{p-1}) \quad \text{for } q \leq -2p-2.$$

又、定 Stiefel 多様体の cell 構造より

$$\pi_q(p^{r-p-1}/p^{p-1}) \approx \pi_q(V_{r-p,r}) \quad \text{for } q \leq -2p-1.$$

よって

Prop. 4.4. $\pi_{s-p-q-1}^{r-p-q-1}(S_+^{r,0}) \approx \pi_{-p+(p+q)}(V_{-p+r,r})$
for $p \leq 0$ and $p+q \leq r-2$.

上の同型の右辺は実 Stiefel 多様体の meta-stable range の homotopy 群によられるから、Hoo-Mahowald [6] によつて $r \leq 13$ に対して計算されている。よって、この同型を James 周期性に利用して、 $\lambda_{p,q}^s$, $p+q \leq 13$, は群として [6] からわかる。

Bredon [5] は Landweber [7] と異なるやり方で上の同型 (Prop. 4.4) に相当するものを得、これを利用して $\pi_{p,q}^s$, $p+q \leq 13$, のかなりの部分を Hoo-Mahowald [6] を利用して求められる (extension に若干問題がある) としている。

しかし、Hoo-Mahowald [6] の結果を利用すると、 $\lambda_{p,q}^s$ の \mathbb{Z}_2 -homotopy 群の \mathbb{Z}_2 としてどのように理解するかはわかりにくくなり、従つて extension を決めるのに困難となる筈である。我々は [6] を利用せず $\pi_{s-p-q-1}^{r-p-q-1}(S_+^{r,0})$ に直接計算して $\pi_{p,q}^s$ を求める。現在、 $\lambda_{p,q}^s$, $p+q \leq 13$, は、一ヶ所を除いて計算出来たが、その計算結果は [6] と若干くち

がいがある。いつか誤りなのだろうか？

5. $\pi_S^{p,q}(S_+^{r,0})$ の基本的性質

$S^{r,0}$ は, 一般の τ -cohomology の forgetful spectral sequence
又は MR-理論と関係して重要な空間で, 既述に似てい
るしるべき対象である. $\pi_S^{p,q}(S_+^{r,0})$ は 基本的周期性同型と
なつ.

$$\mu: \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

と直交積とする. これは τ -写像

$$\mu: \mathbb{R}^{r,0} \times \mathbb{R}^{0,n} \xrightarrow{\tau} \mathbb{R}^{n,0}$$

とみなされ, τ -同相

$$\omega: \mathbb{R}^{r,0} \times \mathbb{R}^{0,n} \approx_{\tau} \mathbb{R}^{r,0} \times \mathbb{R}^{n,0}$$

$$(\omega(x,y) = (x, \mu(x,y)))$$

と与える. よって τ -同相

$$\omega: S_+^{r,0} \wedge \Sigma^{0,n} \approx_{\tau} S_+^{r,0} \wedge \Sigma^{n,0}$$

が誘導され, 同期 $(n, -n)$ の周期性同型

$$\omega^+: \pi_S^{p,q}(S_+^{r,0}) \approx \pi_S^{p+n, q-n}(S_+^{r,0})$$

が得られる.

r を固定したとき, このような直交積と n の最小値は
 $a_r = 2^{q(r-1)}$ である. よって, 周期性同型

$$(5.1) \quad \omega_r^+: \pi_S^{p,q}(S_+^{r,0}) \approx \pi_S^{p+a_r, q-a_r}(S_+^{r,0})$$

が存在する. 同型 (5.1) と Prop. 4.4 の同型により実 Stiefel 多様体の meta-stable range における homotopy 群の周期性同型になおしたものが James 周期性である.

$$\pi_S^{0,0}(S_+^{r,0}) \ni 1. \quad \omega_+^\dagger 1 = \omega_r \in \pi_S^{q_{r,0}-q_r}(S_+^{r,0}) \quad \text{とおく.}$$

ω_r は環 $\pi_S^{*,*}(S_+^{r,0})$ の乗法について可逆元であり, $\pi_S^{*,*}(S_+^{r,0})$ は $\mathbb{Z}[\omega_r, \omega_r^{-1}]$ -代数になる.

一般に ω_r は一意には決らないが, 直交積を正規化し, 正規化直交積には Clifford C_{r-1} -加群が対応するという図像 ω_r には既約な C_{r-1} -加群が対応している. $r \not\equiv 0 \pmod{4}$ のとき, 既約 C_{r-1} -加群は同値性を除きただ一つ ([3]) であるから, このとき ω_r は $\pi_{0,0}^S (\approx \mathbb{Z}[p]/(p^2-1), [2])$ の可逆元 $\{\pm 1, \pm p\}$ 倍を除き一意に定まる: とわかる. 又, $r \equiv 0 \pmod{4}$ のとき, 既約 C_{r-1} -加群の同値類は二つあるが, 一方は他方から C_{r-1} のある自己同型で誘導されている. このことより, $q_r: S_+^{r,0} \rightarrow S_+^{r,0} ((x_1, \dots, x_r) \mapsto (-x_1, x_2, \dots, x_r))$ とおくとき, 一方は ω_r とすると他方は $\overline{\omega_r} = q_r^\dagger \omega_r$ の形 (やはり $\{\pm 1, \pm p\}$ 倍を除いて) 定まる.

τ -cofibration $S_+^{r,0} \hookrightarrow B_+^{r,0} \rightarrow \Sigma^{r,0}$ の stable τ -cohomotopy 完全列の結合準同型 τ

$$\delta_r^\dagger: \pi_S^{p,q}(S_+^{r,0}) \rightarrow \pi_{r-p,q-1}^S$$

とする.

$$\delta_r^+ \omega_r \in \pi_{r-a_r, a_r-1}^S, \quad \psi(\delta_r^+ \omega_r) \in \pi_{r-1}^S$$

となるが, この等式 J -準同型 $J: \pi_{r-1}(0) \rightarrow \pi_{r-1}^S$ の像は次の命題で与えられる。

Prop. 5.2 $\psi(\delta_r^+ \omega_r)$ は $(\text{Im } J) \cap \pi_{r-1}^S$ の生成元。

勿論, r の値によらず $\psi(\delta_r^+ \omega_r) = 0$ となることもあるが, 一般に $\delta_r^+ \omega_r \neq 0$. この証明は, ω_r に対応する直交群 τ -写像 $\mu_r: S^{r,0} \times (B^{0,a_r}, S^{0,a_r}) \rightarrow (B^{a_r,0}, S^{a_r,0})$ であるとき, $\delta_r^+ \omega_r$ は μ_r の equivariant Hopf 構造で与えられることを示せばよい。まず J -準同型 J Hopf 構造で与えられるから, 対応像: $\omega_r \Leftrightarrow$ 既約 C_{r-1} -加群 \Leftrightarrow 既約 graded C_r -加群 $\Leftrightarrow KO(S^r)$ の生成元 ([31]), を示せば上の命題が証明される。

包含 $\eta_{r,r+1}: S^{r,0} \hookrightarrow S^{r+1,0}$ の誘導する写像により, ω_r を一対一対応でおくとき,

$$\eta_{r,r+1}^+ \omega_{r+1} = \begin{cases} \omega_r, & a_r = a_{r+1} \text{ のとき,} \\ \omega_r^2, & a_{r+1} = 2a_r, r \not\equiv 0 \pmod{4}, \\ \omega_r \bar{\omega}_r, & r \equiv 0 \pmod{4} \end{cases}$$

となるように ω_{r+1} が選べる。このことは, r について recursive に $\pi_S^{*,*}(S^{r,0})$ を計算するのに重要な関係にある。

$\delta_r^+ \omega_r$ は $\text{Im } J$ の生成元の equivariant 化であるが, その

他に2種類の元, 特には Hopf 写像の equivariant 化が必要になる. 同様に Hopf 写像の stable 類に相関する equivariant 化が行なわれ, これは Clifford 代数の種類の involution が利用される. 又, $p+q > 7$ の stems r は, Toda bracket の equivariant 化が若干利用される.

6. 準同型 θ .

$$\pi_q^S = \varinjlim_n [\Sigma^{p+n}, \Sigma^n] = \varinjlim_n [\Sigma^{q+2n}, \Sigma^{2n}],$$

$$\pi_{p,q}^S = \varinjlim_n [\Sigma^{p+n, q+n}, \Sigma^{n, n}]^{\tau} = \varinjlim_n [\Sigma^{p+2n, q+2n}, \Sigma^{2n, 2n}]$$

と右側 τ があるから, 準同型: $[\Sigma^{q+2n}, \Sigma^{2n}] \rightarrow [\Sigma^{2n, q+2n}, \Sigma^{2n, 2n}]$,

$[f] \mapsto [1 \wedge f]$, は colimit と可換 τ ; 準同型

$$\theta: \pi_q^S \longrightarrow \pi_{0,q}^S$$

を誘導する.

Prop. 6.1. $\gamma \circ \theta = \text{id}$, $\phi \circ \theta = \text{id}$.

Cor. 6.2. $\pi_{0,q}^S \approx \pi_q^S \oplus \text{Ker}[\gamma: \pi_{0,q}^S \rightarrow \pi_q^S]$.

forgetful exact sequences: Prop. 6.1 と (5) (7) 12,

Cor. 6.3. $0 \rightarrow \pi_{1,q}^S \xrightarrow{\chi} \pi_{0,q}^S \xrightleftharpoons[\phi]{\gamma} \pi_q^S \rightarrow 0$

は split short exact sequence τ .

$$\pi_{1,q}^S = \text{Ker}[\gamma: \pi_{0,q}^S \rightarrow \pi_q^S].$$

$n \geq 0$ に対して

$$\theta_n = \chi^n \circ \theta : \pi_{\mathbb{Z}}^S \rightarrow \pi_{-n, \mathbb{Z}}^S$$

と置く。

Cor. 6.4. $\phi \circ \theta_n = \text{id}$ ($\psi \circ \theta_n = 0$ for $n > 0$).

Cor. 6.5. $\pi_{-n, \mathbb{Z}}^S = \pi_{\mathbb{Z}}^S \oplus \text{Ker}[\phi : \pi_{n, \mathbb{Z}}^S \rightarrow \pi_{\mathbb{Z}}^S], n \geq 0$.

7. External squaring operation (Bredon 構成)

involution $\tau : \Sigma^{2n}$ -sphere $(\Sigma^n \wedge \Sigma^n, \tau)$, $\tau(xy) = (y \wedge x)$, $\tau^2 = \text{id}$. 45° 回転により, $\tau = [2]$ 相当

$$\alpha : \Sigma^{n, n} \xrightarrow{\sim} (\Sigma^n \wedge \Sigma^n, \tau)$$

が得られる。

$\pi_p^S = \varinjlim_n [\Sigma^{2n+p}, \Sigma^{2n}] \ni \chi = [f], f : \Sigma^{2n+p} \rightarrow \Sigma^{2n}$, に対して $[\alpha^{-1} \circ (f \wedge f) \circ \alpha] \in [\Sigma^{2n+p, 2n+p}, \Sigma^{2n, 2n}]^{\tau}$ と対応させる。

これは colimit と可換な写像

$$(7.1) \quad Sq : \pi_p^S \rightarrow \pi_{p, p}^S, \chi = [f] \rightarrow [\alpha^{-1} \circ (f \wedge f) \circ \alpha],$$

を定める。Bredon [5] は, $\pi_{p, q}^S$ の計算にこの構成を数々利用している。これは, stable equivariant cohomotopy と呼ばれる stable cohomotopy の equivariant cohomology theory と呼ばれる立場から, 一般の external squaring operation と呼ばれる。

世る x の τ がある。 χ の基本的性質:

Prop. 7.1. $\psi \circ S_q(x) = x^2, \quad \phi \circ S_q(x) = x.$

$$S_q(x+y) = S_q(x) + S_q(y) + \theta(xy) \cdot \delta_1^+ \omega_1^{1-p}$$

(121. $x, y \in \pi_p^S$).

Cor. 7.2. $\chi^r \circ S_q : \pi_p^S \rightarrow \pi_{p-r, p}^S$ は 同型 for $r > 0$.

$\phi \circ \chi^r \circ S_q = \text{id}$, $r > 0$, τ がある。 $\chi^r \circ S_q$ は fixed-point exact sequences に split する。

Cor. 7.3. $p < q$ に対して

$$0 \rightarrow \lambda_{p, q}^S \rightarrow \pi_{p, q}^S \xrightleftharpoons[\chi^{q-p} \circ S_q]{\phi} \pi_q^S \rightarrow 0$$

は split short 完全列 τ 。

(7.4) $\pi_{p, q}^S \approx \lambda_{p, q}^S \oplus \pi_q^S$ for $p < q$.

特に, $p=0, q>0$ の場合を考察する。

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \lambda_{0, q}^S & \rightarrow & \pi_{0, q}^S & \xrightleftharpoons[\theta, \chi^q \circ S_q]{\phi} & \pi_q^S \rightarrow 0 \\ & & & & \downarrow \psi & & \\ & & & & \pi_q^S & & \end{array}$$

上の水平完全列に対して, $\theta, \chi^q \circ S_q$ は $=$ の splitting τ による, $\psi \circ \theta = \text{id}$, $\psi \circ (\chi^q \circ S_q) = 0$ τ がある。 τ は τ 。

$\pi_{0,q}^S$ は $\pi_q^S \oplus \pi_q^S$ に直和因子に α (α は θ -image α 12, 他は $\chi^0 \cdot S_q$ -image). 且つ, $\phi \cdot (\theta - \chi^0 \cdot S_q) = 0$ であるから, 像の制限により準同型

$$\hat{\theta} = \theta - \chi^0 \cdot S_q : \pi_q^S \rightarrow \lambda_{0,q}^S$$

が定まり,

$$\tilde{\psi} \circ \hat{\theta} = \text{id} \quad (\tilde{\psi} = \psi|_{\lambda_{0,q}^S})$$

Landweber [7] の同型 (cf., p. 8) より

$$\lambda_{0,q}^S = \pi_q^S(P_+^\infty).$$

これより, split 全射

$$(7.5) \quad \lambda_{0,q}^S = \pi_q^S(P_+^\infty) \xrightleftharpoons[\hat{\theta}]{\tilde{\psi}} \pi_q^S \rightarrow 0$$

が得られる. これは $\mathbb{Z}/2$ に対する Kahn-Priddy の定理以外ならない. (この注意は南春男氏による).

(7.5) を $\pi_{0,q}^S$ の計算に利用される.

8. 結果の表.

fixed-point exact sequence より, ± 3 に同型

$$(8.1) \quad \pi_{p,q}^S \approx \lambda_{p,q}^S \quad \text{for } q < -1$$

が得られる. これは (7.4) より, $p < q$ または $q < -1$ のときは $\lambda_{p,q}^S$ が成り立つのは $\pi_{p,q}^S$ は ± 3 に同型. $\lambda_{p,q}^S$,

$p+q \leq 13$, の表は, Prop. 3.2, Prop. 4.4 の同型を通じ, 周期性同型を利用して Hoo-Mahowald [6] の meta-stable range の実 Stiefel 多様体の homotopy 群の表から作ること出来る. その意味で $\lambda_{p,q}^S$ の表は省略する.

$\lambda_{p,q}^S$ であらゆせない $\pi_{p,q}^S$ の群としての表を下記する.

$\pi_{p,q}^S$, $0 \leq p+q \leq 13$, $-1 \leq q \leq p$, の表

$p+q \backslash q$	-1	0	1	2	3	4	5	6
0	0	$\mathbb{Z} + \mathbb{Z}$						
1	0	\mathbb{Z}						
2	0	\mathbb{Z}	$(\mathbb{Z}/2)^2$					
3	$\mathbb{Z}/12$	\mathbb{Z}	$\mathbb{Z}/24$					
4	0	\mathbb{Z}	0	$\mathbb{Z}/2$				
5	0	\mathbb{Z}	0	$\mathbb{Z}/2$				
6	$\mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z} + \mathbb{Z}/2$	0	$\mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z}/8 + \mathbb{Z}/24$			
7	$\mathbb{Z}/2 + \mathbb{Z}/120$	$\mathbb{Z} + (\mathbb{Z}/2)^3$	$\mathbb{Z}/240$	0	$\mathbb{Z}/4 + \mathbb{Z}/12 + \mathbb{Z}/480$			
8	$\mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z} + (\mathbb{Z}/2)^4$	$(\mathbb{Z}/2)^3$	0	$\mathbb{Z}/4 + \mathbb{Z}/24$	$(\mathbb{Z}/2)^4$		
9	$\mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z} + (\mathbb{Z}/2)^2$	$(\mathbb{Z}/2)^6$	$\mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z}/2 + \mathbb{Z}/24$	$(\mathbb{Z}/2)^2$		
10	0	$\mathbb{Z} + \mathbb{Z}/3$	$(\mathbb{Z}/2)^3$	$(\mathbb{Z}/2)^2 + \mathbb{Z}/3$	$\mathbb{Z}/24$	$\mathbb{Z}/3$	$(\mathbb{Z}/2)^2$	
11	$\mathbb{Z}/252$	\mathbb{Z}	$\mathbb{Z}/2 + \mathbb{Z}/8 + \mathbb{Z}/63$	$\mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z}/3 + \mathbb{Z}/8 + \mathbb{Z}/504$	0	$\mathbb{Z}/8 + \mathbb{Z}/63$	
12	0	\mathbb{Z}	$\mathbb{Z}/2$	0	$\mathbb{Z}/3 + \mathbb{Z}/8$	0	0	$(\mathbb{Z}/2)^2$
13	$\mathbb{Z}/3$	\mathbb{Z}	$\mathbb{Z}/2 + \mathbb{Z}/3$	0	$(\mathbb{Z}/3)^2 + \mathbb{Z}/8$	0	$\mathbb{Z}/3$	$(\mathbb{Z}/2)^4$

文献

[1] S. Araki, Forgetful spectral sequences, Osaka J. Math., 16 (1979), 173-199.

[2] S. Araki and M. Murayama, τ -cohomology theories, Japan. J. Math., 4 (1978), 363-416.

[3] M. F. Atiyah, R. Bott and A. Shapiro, Clifford modules, Topology 3, Suppl. 1 (1966), 81-120.

[4] G. E. Bredon, Equivariant stable stems, Bull. Amer. Math. Soc., 73 (1967), 269-273.

[5] G. E. Bredon, Equivariant homotopy, Proc. of Conference on Transformation groups, New Orleans, 1967, Springer-Verlag (1968), 281-292.

[6] C. S. Hoo and M. E. Mahowald, Some homotopy groups of Stiefel manifolds, Bull. Amer. Math. Soc., 71 (1965), 661-667.

[7] P. S. Landweber, On equivariant maps between spheres with involutions, Amer. J. Math., 89 (1969), 125-137.

[8] J. Levine, Spaces with involutions and bundles over P^n , Amer. J. Math., 85 (1963), 516-540.